Introduction aux Probabilités et variables aléatoires

Sommaire

I – Probabilités

1 – définitions

☞ Expérience aléatoire : Expérience dont les résultats ne sont ni prévisibles ni calculables.

☞ Issue ou événement élémentaire : autre nom d'un résultat

☞ Univers des résultats : l'ensemble de ces résultats (E ou Ω)

Exemple 1 : Jeannot lance une pièce une fois et repère la face supérieure
Résultats possibles : PILE, FACE (2)

Exemple 2 : Pierre effectue deux lancers successifs d'une même pièce et repère la face supérieure à chaque lancer
Résultats possibles : PILE-PILE, PILE-FACE, FACE-PILE, FACE-FACE (4)
Remarque : la notion d'ordre est importante dans ce cas

Exemple 3A : Jacques choisit au hasard et simultanément deux personnes dans le groupe composé de Alain, Bernard et Charles
Résultats possibles : Alain – Bernard, Alain – Charles, Bernard – Charles (3)

Remarque : la notion d'ordre n'a pas d'importance

Exemple 3B : Jacques choisit au hasard et successivement deux personnes dans le groupe composé de Alain, Bernard et Charles, le premier choisi sera nommé représentant du groupe et le second sera nommé adjoint
Résultats possibles : Alain – Bernard, Bernard – Alain, Alain – Charles, Charles – Alain, Bernard – Charles, Charles – Bernard (6)
Remarque : la notion d'ordre est importante

Exemple 4 : Aline choisit un nombre entier au hasard parmi les nombres entiers
Résultats possibles : il y a une infinité de résultats que l'on pourrait numéroter afin de les classer

Exemple 5 : Dominique choisit un nombre réel au hasard dans l'intervalle [0 ; 1]
Résultats possibles : On dira ici que E est infini et non dénombrable

☞ Événement : regroupement de résultats

Exemple 6 : Claude lance un dé une fois et repère la face supérieure. L'événement "obtenir un nombre supérieur strictement à 4" est composé des résultats 5 et 6

☞ Univers discret : Cette définition s'applique dans le cas où les résultats sont en nombre fini (E = { $e_1, e_2, \ldots, e_n$ }) ou en nombre infini mais pouvant être numérotés (dénombrables) (E = { $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ })

☞ Loi de probabilité discrète : On considère une expérience aboutissant à un univers discret E. Définir une loi de probabilité P sur E, c'est associer à chaque résultat un nombre positif tel que :

- La somme de tous ces nombres est égale à 1
- La probabilité d'un résultat est le nombre associé
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des résultats le composant

Exemple 7A : Pierre lance une pièce une fois et repère la face supérieure. Il associe arbitrairement au résultat PILE le nombre 0,3 et au résultat FACE le nombre 0,7

Exemple 7B : Pierre refait la même expérience mais associe cette fois à chaque résultat leur fréquence d'apparition obtenu lors de l'observation d'un grand nombre de lancers. Cette façon de procéder donne un sens à la notion de probabilité

Exemple 8 : Jean lance un dé très particulier une fois et observe la face supérieure. E = {1; 2; 3; 4; 5; 6}. En associant à chaque résultat sa fréquence d'apparition, on obtient :

Résultat	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,5	0,1	0,2	0,05	0,05	0,1

Un tel dé peut tout à fait exister et on dira qu'il est déséquilibré

On note les événements suivants :
A : "obtenir 3" P(A) = 0,2
B : "obtenir un nombre pair" P(B) = 0,1 + 0,05 + 0,1 = 0,25
C : "obtenir un nombre strictement plus grand que 4" P(C) = 0,05 + 0,1 = 0,15

☞ événements incompatibles :
$A \cap B = \{ résultats\, communs\, à\, A\, et\, B \} = \emptyset$ (pas de résultats en commun)

☞ événements indépendants : la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre
Cette notion sera détaillée plus loin

☞ événements équiprobables : P(A) = P(B)

☞ événement possible : $P(A) \neq 0$

Afin de faciliter le calcul des probabilités, il est important de représenter au mieux l'univers des résultats. On utilisera généralement à cet effet des DIAGRAMMES, des TABLEAUX et des ARBRES

2 – Propriétés

On considère une loi de probabilité P définie sur E, A et B sont deux événements quelconques.
On note $\overline{A}$ l'événement contraire de A

$P(E)=1$
$P(\emptyset)=0$
$0 \leq P(A) \leq 1$
$P(\overline{A})=1-P(A)$
$P(A)+P(B)=P(A \cap B)+P(A \cup B)$

Exemple 9 : Jean tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On définit A et B :
A : "Tirer un carreau" ; B : "Tirer un valet"
A et B : A ∩ B : "Tirer un valet de carreau"
A ou B : A ∪ B : "Tirer un carreau ou un valet"

$P(A)=\frac{8}{32} ; P(B)=\frac{4}{32} ; P(A \cap B)=\frac{1}{32} ; P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)=\frac{11}{32}$

3 – Hypothèse d'équiprobabilité

☞ Hypothèse d'équiprobabilité : On suppose que tous les résultats ont la même probabilité.

Dans ce cas PARTICULIER, pour tout événement A; $P(A)=\frac{nombre\,de\,résultats\ \,favorables\,à\,A}{nombre\,total\,de\,résultats}$

On ramène dans ce cas, le calcul de probabilités à un recensement ou dénombrement des résultats favorables

Remarque : l'énoncé d'un exercice peut clairement signifier cette hypothèse ou l'utilisation de certains mots pourra le laisser penser sans aucun doute ("tirage au hasard", "objet équilibré", …)

Exemple 10 : Jean lance un dé bien équilibré et observe la face supérieure. E = {1; 2; 3; 4; 5; 6}.
Vu l'énoncé, on peut faire l'hypothèse d'équiprobabilité. Dans ce cas PARTICULIER, on a :

Résultat	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On note les événements suivants :

A : "obtenir 3" P(A) = $\frac{1}{6}$

B : "obtenir un nombre pair" P(B) = $\frac{1}{6}$ + $\frac{1}{6}$ + $\frac{1}{6}$ = $\frac{1}{2}$

C : "obtenir un nombre strictement plus grand que 4" P(C) = $\frac{1}{6}$ + $\frac{1}{6}$ = $\frac{1}{3}$

Exemple 11 : Dans un groupe de 150 personnes, 90 jouent de la guitare, 100 jouent du piano et 55 jouent des deux instruments. On choisit une personne au hasard dans ce groupe, calculer p la probabilité à 0,01 près qu'il ne joue d'aucun instrument.

Représentons l'univers des résultats par un tableau croisé ou à double entrée :

	Jouent de la guitare	Ne jouent pas de la guitare	Total
Jouent du piano	55	100 – 55 = 45	100
Ne jouent pas du piano	90 – 55 = 35	50 – 35 = 60 – 45 = 15	150 – 100 = 50
Total	90	150 – 90 = 60	150

$$p=\frac{15}{150}=\frac{1}{10}=0.1$$

☞ Cas général du tableau à double entrée :

Tableau des probabilités

	A	$\overline{A}$	Total
B	P($A \cap B$)	P($\overline{A} \cap B$)	P(B)
$\overline{B}$	P($A \cap \overline{B}$)	P($\overline{A} \cap \overline{B}$)	P($\overline{B}$)
Total	P(A)	P($\overline{A}$)	1

Remarque : Si l'hypothèse d'équiprobabilité est vérifiée, on peut passer du tableau des effectifs au tableau des probabilités en divisant toutes les valeurs par l'effectif total

4 – probabilité conditionnelle

Soit E un univers de résultats issus d'une expérience et P une probabilité définie sur E

a – définition

Soit A un événement possible de E. On définit la "probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé" ou plus simplement "probabilité de B sachant A" :

$$P_A(B)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarque : de cette définition, on en déduit $P(A \cap B)=P_A(B) \times P(A)$

☞ événements indépendants : Soit A et B deux événements possibles. A et B sont indépendants, lorsque la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre. Cela se traduit par $P_A(B)=P(B)$ ou $P_B(A)=P(A)$.
Dans ce cas et uniquement dans ce cas : $P(A \cap B)=P(A) \times P(B)$

Formule des probabilités totales : Soit B un événement quelconque de E

Cas courant : on utilise une partition de E en deux événements incompatibles (A et $\overline{A}$)
$P(B)=P(A \cap B)+P(\overline{A} \cap B)=P_A(B) \times P(A)+P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})$

Cas général : on utilise une partition de E en n événements $A_{1,} A_{2,} \dots, A_n$ (les événements sont incompatibles deux à deux et l'union de tous ces événements redonne E)
$P(B)=P(A_1 \cap B)+\ldots+P(A_n \cap B)=P_{A_1}(B) \times P(A_1)+\ldots+P_{A_n}(B) \times P(A_n)$

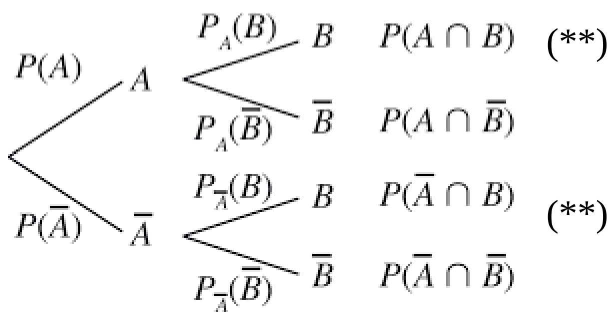
Formulation synthétique : $P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)=\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) \times P(A_i)$

Ces formules seront illustrées à l'aide des arbres pondérés

b – arbre pondéré

Un arbre pondéré permet de représenter un univers de résultats.

☞ Cas courant de l'arbre à deux niveaux :

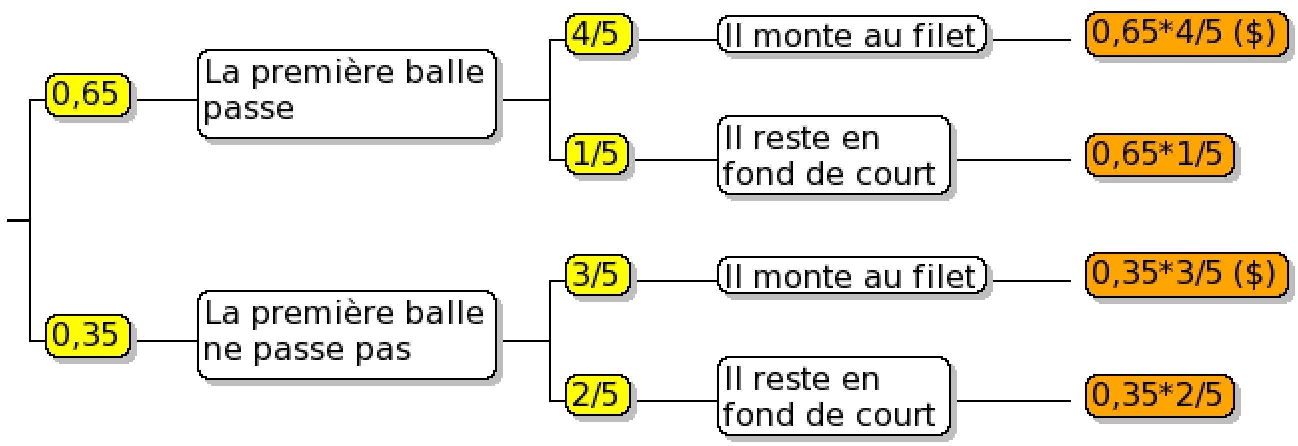


☞ Règles de constitution et d'utilisation des arbres :

- les pondérations proviennent des proportions
- la somme des probabilités issues d'un même noeud est égal à 1. Cet arbre étant lu de la gauche vers la droite, prendre en compte toutes les branches situées à droite d'un noeud
- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches composant ce chemin
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet événement

En repérant les chemins favorables à B (**), on retrouve la formule des probabilités totales :
$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=P_A(B)\times P(A)+P_{\overline{A}}(B)\times P(\overline{A})$

Exemple 12 : Grob est un joueur de tennis d'un bon niveau qui a la réputation de monter au filet sur son service. En effet, son entraîneur dit de lui que la première balle passe à 65 %, sur la première balle il monte 4 fois sur 5 et sur la deuxième, 3 fois sur 5. Utilisons un arbre pondéré pour décrire cette situation



On note F : "Il monte au filet"

($) repère les chemins favorables :

$P(F)=0{,}65\times\frac{4}{5}+0{,}35\times\frac{3}{5}=0{,}73$

On note A : "la première balle passe"
P(A) = 0,65

à l'aide de l'arbre, on obtient :

P(A et F) = P(F et A) = $0{,}65\times\frac{4}{5}=0{,}52$

$P_A(F)=\frac{4}{5}=0{,}8$ (sans aucun calcul)

Question : A et F sont-ils indépendants ?
P(A et F) = 0,52
$P(A)\times P(F)=0{,}4745$
On est dans le cas où : $P(A\cap F)\neq P(A)\times P(F)$
Réponse : A et F ne sont pas indépendants

Source de l'image (url) : http://acquizitor.net/arbre02.php?param=650;250;12;50;0,65;La%20premi%C3%A8re%20balle_passe;0,35;La%20premi%C3%A8re%20balle_ne%20passe%20pas;4/5;Il%20monte%20au%20filet;1/5;Il%20reste%20en_fond%20de%20court;3/5;2/5;0,65*4/5%20%28$%29;0,65*1/5;0,35*3/5%20%28$%29;0,35*2/5

5 – expériences indépendantes

☞ Définition : On considère une expérience constituée de plusieurs expériences successives. On dira que les expériences successives sont indépendantes si le déroulement et l'issue d'une des expériences n'influencent pas le déroulement et l'issue des autres

☞ Propriété : On considère une expérience EX constituée de plusieurs expériences successives indépendantes EX_i (i compris entre 1 et n). On admet que la probabilité d'un événement de EX est égale au produit des probabilités des événements des EX_i le composant

Exemple 13 : succession d'expériences différentes
Pierrette lance un dé parfait puis tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité p d'obtenir 1 avec le dé et une figure ?
On considère que les expériences sont indépendantes : $p=\frac{1}{6}\times\frac{3\times4}{32}=\frac{1}{16}$

Exemple 14A : répétition de la même expérience
Pierrot lance six fois de suite un même dé équilibré.
Question et piège classique : va t-il obtenir un 1 à coup sûr ?

On considère que l'on reproduit 6 fois de suite la même expérience de façon indépendante.
On note A : "obtenir au moins une fois 1"
Le complémentaire de A est l'événement $\overline{A}$: " ne jamais obtenir 1"
A chaque tirage, la probabilité de ne pas obtenir 1 est de $\frac{5}{6}$
Ainsi : $P(\overline{A})=(\frac{5}{6})^6$ et $P(A)=1-(\frac{5}{6})^6\approx 0{,}665$

Réponse : NON

Exemple 14B (un peu plus compliqué) : on lance une même pièce plusieurs fois et de façon indépendante, et on s'arrête au premier pile obtenu. On se place dans le cas où la probabilité d'obtenir pile ou face lors d'un seul lancer est de $\frac{1}{2}$
E = {p , fp , ffp, fffp, …}
On note A : "on obtient le premier pile lors d'une série où le nombre de lancers est pair"
P(A) = $\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\ldots$ = $\frac{1}{4}+(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{4})^3+\ldots$ = $\frac{1}{4}(1+\frac{1}{4}+(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{4})^3+\ldots)$
Appliquons le résultat suivant : si $|x| < 1$, alors $1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{k=+\infty} x^k=\frac{1}{1-x}$
Ce qui donne :
$P(A)=\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$

6 – dénombrement

☞ Approche : On considère un sac contenant n boules. On décide d'en choisir au hasard p. On propose trois modes opératoires :
- A : tirages successifs AVEC remise
- B : tirages successifs SANS remise
- C : tirage simultané

On admet les résultats suivants

Cas	Ordre des boules	Nombre de tirages possibles	Vocabulaire associé
A	Important	n^p	p-liste
B	Important	n(n – 1) … (n – p + 1)	Arrangement permutation (cas n = p)
C	Sans importance	$\binom{n}{p}$ (utilisation de la calculatrice)	Combinaison, "p parmi n", coefficient binomial

Remarque : Si vous êtes amené à faire un calcul d'arrangement ou de combinaison, pensez à utiliser votre calculatrice. Voici quelques formules supplémentaires si vous êtes dans le cas d'un "calcul à la main" :

$n!=n\times(n-1)\times\ldots\times1$ (factorielle de n)

$\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemple 15 : On tire trois cartes au hasard d'un jeu de 32 cartes.
On note A l'événement : "les trois cartes sont des figures"
n = 32, p = 3
Il y a 12 figures dans le jeu

Cas 1 : tirages successifs AVEC remise

$$P(A)=\frac{12^3}{32^3}=\frac{27}{512}\approx0{,}0527$$

Cas 2 : tirages successifs SANS remise

$$P(A)=\frac{12\times11\times10}{32\times31\times30}=\frac{11}{248}\approx0{,}0444$$

Cas 3 : tirage simultané

$$P(A)=\frac{\binom{12}{3}}{\binom{32}{3}}=\frac{\frac{12!}{3!9!}}{\frac{32!}{3!29!}}=\frac{12!3!29!}{3!9!32!}=\frac{12\times11\times10}{32\times31\times30}=\frac{11}{248}$$

Remarque : les deux derniers cas aboutissent au même résultat. C'est un cas particulier, car l'ordre n'intervient pas dans la définition de l'événement

Exemple 16 : Une expérience consiste à tirer au hasard cinq cartes simultanément d'un jeu de 32 cartes. Soit A et B les événements suivants.
A : "la main contient un as" B : "la main contient un carré"

Calculer P(A) et P(B)

Concernant A, la main est constituée d'une carte à choisir parmi les 4 as, les autres étant à choisir parmi les 28 autres cartes n'étant pas des as

$$P(A)=\frac{\binom{4}{1}\times\binom{28}{4}}{\binom{32}{5}}=\frac{4\times28!5!27!}{4!24!32!}=\frac{4\times28\times27\times26\times25\times5}{32\times31\times30\times29\times28}=\frac{2925}{7192}\approx0.407$$

Concernant B, en imposant un carré particulier (carré de 7 par exemple), la cinquième carte de la main est à choisir dans les 28 autres cartes (tout sauf le 7 dans notre exemple) et Il y a 8 carrés possibles

$$P(B)=\frac{8\times 28}{\binom{32}{5}}=\frac{8\times 28\times 5!27!}{32!}=\frac{8\times 28\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{32\times 31\times 30\times 29\times 28}=\frac{1}{899}$$

II – Variables aléatoires réelles

1 – Définitions générales

On considère une expérience aléatoire donnant des résultats. Soit E l'ensemble de tous les résultats.
☞ Variable aléatoire réelle : Toute fonction X de E dans $\mathbb{R}$ qui à tout résultat de E associe un nombre réel

Exemple 1 : quelques exemples de variables aléatoires réelles
- Pierre lance un dé rouge et un dé bleu simultanément et repère la somme des numéros des faces supérieures (nombre fini de valeurs)
- Pierre lance 10 fois de suite un dé et repère le nombre de fois où il obtient un nombre supérieur ou égal à 4 (nombre fini de valeurs)
- Jeannette tire (tirage avec remise) plusieurs fois de suite une carte d'un jeu de 32 cartes et s'arrête dès qu'elle tire un valet. Elle repère alors le nombre de tirages nécessaires (nombre infini et dénombrable de valeurs)
- Dans une cantine de type self, lors du déjeuner, on choisit au hasard le plat principal et on repère la masse en kg de la part de viande servi (nombre infini et non dénombrable de valeurs)
- Dans une université, on choisit un étudiant au hasard et on repère sa taille en cm (nombre infini et non dénombrable de valeurs)

a – variable aléatoire discrète

On considère E, un univers discret et P une probabilité définie sur E. Définir X c'est :
- recenser tous les valeurs prises par X : $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$
- déterminer les probabilités correspondantes $P(X=x_1), P(X=x_2), \ldots$

On note J, l'ensemble des indices des x_i . J = {1 , 2 , … , n} ou J = {1 , 2 , … , n , …}

☞ Loi de probabilité induite sur X : $P_X(\{x_i\})=P(X=x_i), i\in J$

☞ Espérance : $E(X)=\sum_{i\in J} x_i \cdot P(X=x_i)$

☞ Variance : $V(X)=\sum_{i\in J} (x_i-E(X))^2 \cdot P(X=x_i)$

☞ Ecart-type : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Remarque : Dans le cas où J est fini, E(X), V(X) et $\sigma(X)$ existent. Par contre, dans le cas où J est infini, ces valeurs peuvent ne pas exister.

☞ Fonction de répartition de X : pour tout x de $\mathbb{R}$, $F_X(x)=P(X\leq x)$

Remarque : l'événement { $X\leq x$ } représente l'ensemble des résultats ω de E tels que $X(\omega)\leq x$

Exemple 2 : Le YAUNBUG est un jeu dont les modalités suivent
le joueur s'acquitte d'une mise de départ de 5 euros puis il tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes

- s'il tire la dame de pique, il gagne 100 euros
- Sinon, s'il tire une dame, il gagne 10 euros
- Sinon, s'il tire une figure, il gagne 1 euro
- Sinon il ne gagne rien

On se pose la question de savoir si ce jeu est équitable pour le joueur

On s'intéresse à la loi de probabilité de la variable aléatoire associée aux gains réels du YAUNBUG. Les valeurs prises sont 95, 5, - 4, - 5

Les x_i	95	5	- 4	- 5
Les $P(X=x_i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{20}{32}$

$$E(X)=\frac{1\times 95+3\times 5-8\times 4-20\times 5}{32}=\frac{-22}{32}=\frac{-11}{16}\approx -0.69<0$$

Interprétation de E(X) : E(X) représente le gain réel moyen (valeur relative) obtenu à ce jeu si le joueur se livre à ce jeu à de nombreuses reprises

Le jeu n'est donc pas équitable pour le joueur

☞ événements indépendants X et Y : Soit X et Y deux variables définies sur E, prenant respectivement les valeurs $x_{1,}\dots,x_n$ et $y_1,\dots,y_m$. On dit que X et Y sont indépendants lorsque les événements (X = x_i) et (Y = y_j) sont indépendants deux à deux, c'est-à-dire : $P((X=x_i)\cap(Y=y_j))=P(X=x_i)\times P(Y=y_j), pour\ 1\leq i\leq n\ et\ 1\leq j\leq m$

b – variable aléatoire à densité (continue)

Contexte : On se place dans le cas où X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et les événements sont maintenant de la forme $(X\in I)$ ou I est un intervalle. Ce calcul de probabilité est ramené à un calcul d'intégrale sur I. La fonction à intégrer est notée densité de probabilité.

Exemple 3 : Riop est dans la file d'attente du restaurant universitaire. Il a particulièrement faim et il sait que la part de viande pèse environ 150 g. Il ne posera pas la question de savoir si sa part fera exactement 181 g mais plutôt si elle sera supérieure à 180 g ce qui l'arrangera ou entre 145 g et 155 g ce qui le rassurera ou inférieure à 130 g ce qui le décevra. Ce type de problème pourra se résoudre par l'utilisation d'une variable aléatoire X repérant la masse de la part de viande d'un plateau choisi au hasard et sa première inquiétude sera interprétée par $P(X \geq 180)$

☞ Fonction densité f : fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

- pour tout x réel, $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

☞ Définition : On dira que X est une variable aléatoire à densité ou continue s'il existe une fonction densité f telle que la fonction de répartition de X s'écrit de la façon suivante

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

☞ Loi de probabilité induite sur X : $P_X(]a;b]) = P(a < X \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt$

Interprétation : Pour un intervalle I ayant des bornes a et b, $P_X(I)$ est l'aire en unités d'aire de la région située entre les droites verticales d'équation x = a et x = b, l'axe horizontal des x et la courbe de f, ce que l'on note usuellement "aire sous la courbe entre a et b"

Propriétés admises :

$$P_X(\{a\}) = P(X = a) = 0$$

$$P_X(]a;b]) = P_X([a;b]) = P_X(]a;b[) = P_X([a;b[) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Remarque : Si dans l'exemple précédent, X est une variable aléatoire à densité, alors P(X = 181) = 0. Incroyable : la probabilité que X prenne une valeur exacte est nulle !!!

☞ Espérance : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,dt$

☞ Variance : $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)\,dt$

☞ Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : pour cause de bornes infinies, E(X), V(X) ou $\sigma(X)$ peut ne pas exister

2 – Loi binomiale (Variable aléatoire discrète)

Contexte : On répète une même expérience n fois de façon indépendante où à chaque fois l'expérience aboutit à un succès ou à un échec (épreuve de Bernoulli). La probabilité d'obtenir un succès lors d'une seule expérience est p. A la fin de la série d'expériences, on repère le nombre de succès. Ce nombre est compris entre 0 et n.
On cherche alors à calculer la probabilité d'obtenir k succès lors des n tentatives

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de succès lors des n tentatives. X prend un nombre fini de valeurs (n + 1) comprises entre 0 et n

☞ Définition : X suit la loi binomiale de paramètres n et p notée B(n , p) et on écrira $X \sim B(n,p)$

On admet les résultats suivants :

- soit k compris entre 0 et n , $P(X=k)=\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- E(X) = np V(X) = np(1 – p) $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

Exemple 4-1 : On lance une pièce 3 fois de suite et on repère à l'issue le nombre de pile obtenus. On suppose par ailleurs que la fréquence d'apparition d'un pile lors d'un lancer est de 0,6.
Question : quelle est la probabilité d'obtenir deux pile exactement lors de la série de lancers ?

On note X la variable aléatoire qui repère le nombre de pile de la série de lancers.
$X \sim B(3,0.6)$

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\times 0.6^2\times 0.4^1=3\times 0.6^2\times 0.4^1=0.432$$

Réponse : 0.432
Pour un calcul avec la calculatrice voir le formulaire fourni avec ce document.

Remarques :

- Ce résultat s'obtient en réalisant un arbre pondéré à trois niveaux représentant les séries de lancers possibles puis en comptabilisant les séries favorables
- Il est important de privilégier l'utilisation de la calculatrice plutôt qu'un "calcul à la main" en calculant P(X = 2) au mieux et $\binom{3}{2}$ au pire

Exemple 4-2 : On lance une pièce 50 fois de suite et on repère à l'issue, le nombre de pile obtenus. On suppose par ailleurs que la fréquence d'apparition d'un pile lors d'un lancer est de 0,6.
Question : quelle est la probabilité d'obtenir entre 28 et 31 pile lors de la série de lancers (à 0.001 près) ?

On note X la variable aléatoire qui repère le nombre de pile de la série de lancers.

$X \sim B(50, 0.6)$

On recherche donc $P(28 \leq X \leq 31)$. Pour ce calcul, on privilégie l'emploi de la calculatrice. Certains calculatrices permettent ce calcul directement. Pour celles qui ne proposent que le calcul de P $(X \leq k)$, on applique la règle suivante
$P(28 \leq X \leq 31) = P(27 < X \leq 31) = P(X \leq 31) - P(X \leq 27) \approx 0.430$
Réponse : 0.430

Remarque : cas d'application de la loi binomiale
- lorsqu'une même expérience est répétée plusieurs fois de façon indépendante, c'est le cas lorsqu'on lance un même dé plusieurs fois de suite
- lorsqu'on choisit plusieurs éléments distincts d'un ensemble et que le contexte permet d'admettre que le choix de l'un n'influence pas le choix des autres, c'est le cas lorsque que l'on choisit au hasard des éléments dans un ensemble suffisamment grand pour que l'on considère que le choix de ces éléments se fait dans les mêmes conditions

Exemple 4-3 : Une liste de personnes regroupe 7 filles et 3 garçons. Riop choisit successivement et SANS remise, 3 personnes au hasard dans cette liste. A l'issue de cette sélection, on définit X la variable aléatoire repérant le nombre de garçons sélectionnés.
Question : peut-on appliquer la loi binomiale ?
Réponse : NON, la condition "SANS remise" implique que les tirages ne sont pas indépendants

Remarque : la réponse est OUI, si les tirages se font AVEC remise

Exemple 4-4 : Pauline adresse 50 CV identiques à des entreprises distinctes afin d'obtenir des rendez-vous d'embauche. Elle sait par ailleurs que la probabilité d'obtenir un rendez-vous dans son domaine d'activité, lors de l'envoi d'un seul CV, est de 0,21. On note X la variable aléatoire repérant le nombre de rendez-vous obtenus
Question : peut-on appliquer la loi binomiale ?
Réponse : OUI, l'envoi des 50 CV identiques correspond à la répétition d'une même expérience de façon indépendante. Dans ce cas, $X \sim B(50, 0.21)$

E(X) = $50 \times 0.21 = 10.5$
Interprétation : après une campagne d'envoi de 50 CV, Pauline peut espérer, en moyenne, entre 10 et 11 rendez-vous

P("obtenir exactement 8 rendez-vous") = P(X = 8) = $\binom{50}{8} \times 0.21^8 \times (1-0.21)^{42}$ = 0.102 (à 0.001 près)

Exemple 4-5 : Riop vend des guitares de la marque MYGRAT par téléphone à partir d'un large fichier client. Il choisit ainsi 50 clients au hasard et leur propose de façon identique ses produits. Il sait que la probabilité d'aboutir à une vente lors d'un seul appel, est de 0,02. On assimile le choix des clients à un tirage AVEC remise. On note X la variable aléatoire repérant

le nombre de guitares vendues
Question : peut-on appliquer la loi binomiale ?
Réponse : OUI, pour les mêmes raisons que précédemment. Dans ce cas, $X \sim B(50, 0.02)$

E(X) = $50 \times 0.02 = 1$
Interprétation : après 50 appels, Riop peut espérer, en moyenne, vendre 1 guitare

P("obtenir au moins une vente") = 1 - P(X = 0) = $1 - \binom{50}{0} \times 0.02^0 \times (1-0.02)^{50}$ = 0.636 (à 0.001 près)

3 – Loi de poisson (Variable aléatoire discrète)

Contexte : On cherche à comptabiliser le nombre d'événements d'un phénomène rare (panne, accident, file d'attente, sinistre, rupture de stock, maladie, …) se produisant dans un laps de temps où l'apparition d'un événement n'est pas influencé par l'apparition des événements antérieurs

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'événements dans le laps de temps ou l'intervalle d'étude. X prend a priori comme valeur tout nombre positif ou nul

☞ Définition : Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ

On admet les résultats suivants :
- soit k supérieur ou égal à 0, $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
- E(X) = λ V(X) = λ $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$

Remarque : λ représente le nombre moyen d'occurrences du phénomène dans l'intervalle d'étude

Exemple 5 : Dans un pays, on sait qu'une personne sur 100 est un centenaire. Quelle est la probabilité à 0.01 près de trouver au moins un centenaire parmi 100 personnes choisies au hasard ?

Méthode 1 : Cet exemple peut bien entendu être calculé à l'aide de la variable aléatoire Y suivant la loi binomiale B(100, $\frac{1}{100}$) et la probabilité recherchée est alors $1 - P(Y = 0) \approx 0.63$

Méthode 2 : En définissant la variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$ (nombre moyen d'occurrences), la probabilité recherchée est alors $1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\lambda} \approx 0.63$

Exemple 6 : Sur une portion d'autoroute, on sait qu'il y a en moyenne 3 accidents par jour. Quelle est la probabilité à 0.001 près qu'il y ait au moins 2 accidents un jour donné ?

On note X la variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda=3$, la probabilité recherchée est alors $\alpha=P(X>1)$
$\alpha=1-P(X=0)-P(X=1)=1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}\approx 0.801$

4 – Loi géométrique (Variable aléatoire discrète)

Contexte : Une expérience consiste à renouveler une même épreuve donnant deux résultats possibles (notés ECHEC et SUCCES), de façon indépendante et de s'arrêter à la première apparition d'un succès. On note p la probabilité du succès de l'épreuve.

On note X la variable aléatoire qui repère le rang du premier succès. X prend a priori comme valeur tout nombre strictement positif

☞ Définition : Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p

On admet les résultats suivants :

- soit k > 0, $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$
- E(X) = $\frac{1}{p}$ V(X) = $\frac{1-p}{p^2}$ $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

5 – Loi normale (Variable aléatoire à densité)

Contexte : modélisation des phénomènes naturels issus d'événements aléatoires
Si on note X la variable aléatoire qui recense les valeurs prises par le phénomène étudié, on a les caractéristiques suivantes :

- les valeurs sont réparties de façon symétrique autour d'une valeur moyenne ou espérance que l'on notera μ
- en fonction du cas, les valeurs peuvent être peu ou très resserrées autour de l'espérance. Le paramètre qui quantifie cette dispersion est l'écart-type, noté σ

☞ Définition : Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètre μ et σ (on écrira $X\sim N(\mu,\sigma^2)$)

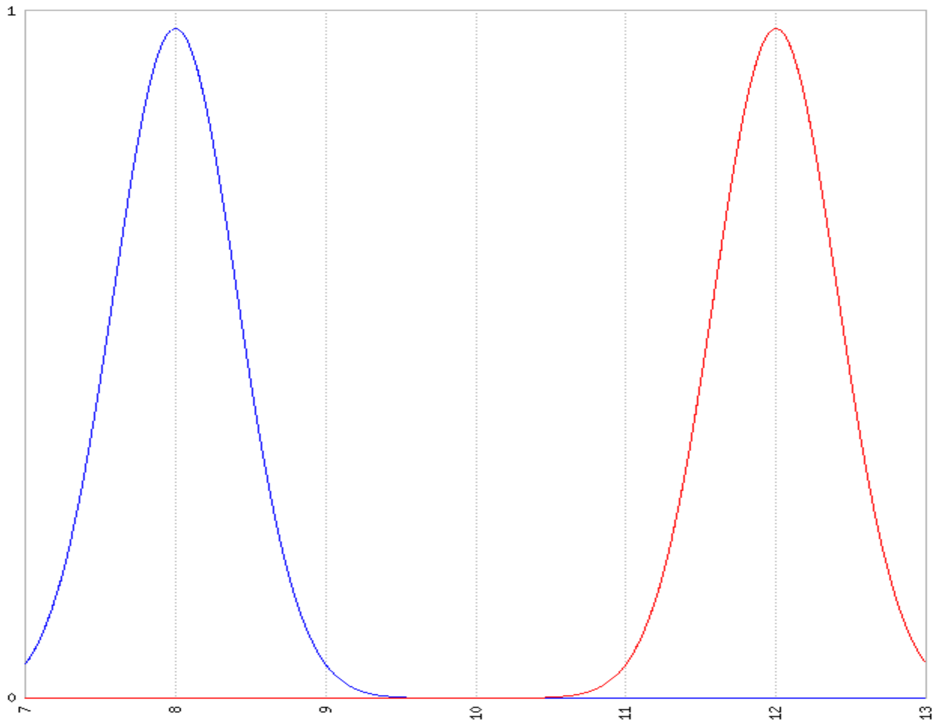
On admet le résultat suivant :

- X est une variable aléatoire à densité et la fonction densité associée est définie par :

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- E(X) = μ V(X) = σ^2 $\sigma(X)=\sigma$

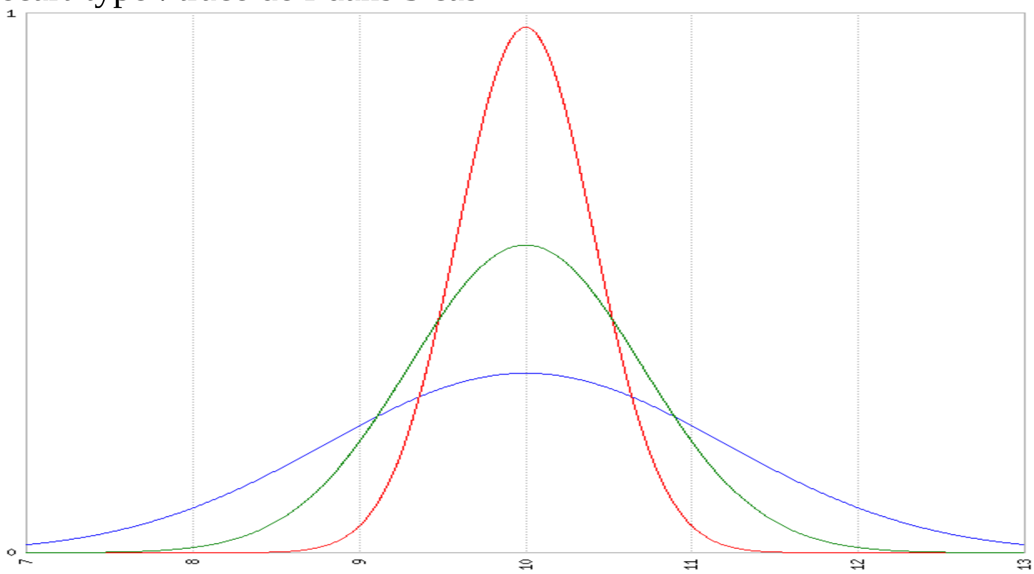
☞ Effet de l'espérance : tracé de f dans 2 cas



- courbe de gauche : $\mu = 8$ et $\sigma = 0.41$
- courbe de droite : $\mu = 12$ et $\sigma = 0.41$

Les courbes sont les mêmes à une translation près !!

☞ Effet de l'écart-type : tracé de f dans 3 cas



- en rouge : $\mu = 10$ et $\sigma = 0.41$. La valeur maximale de f est la plus élevée et la courbe est resserrée autour de l'espérance
- en vert : $\mu = 10$ et $\sigma = 0.7$
- en bleu : $\mu = 10$ et $\sigma = 1.2$. La valeur maximale de f est la moins élevée et la courbe est moins resserrée autour de l'espérance

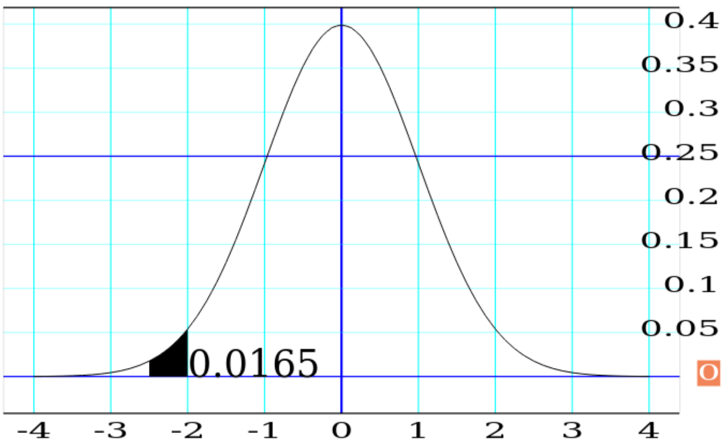
Rappels importants : principe du calcul des probabilités
- la probabilité que X prenne une valeur exacte a est nulle: $P_X(\{a\}) = P(X = a) = 0$
- la probabilité que les valeurs de X se situent dans un intervalle de bornes a et b est :

$$P_X(]a;b])=P_X([a;b])=P_X(]a;b[)=P_X([a;b[)=\int_a^b f(t)\,dt$$

Remarques :

- pour des raisons de symétrie, on admet que $P(X\leq\mu)=P(X\geq\mu)=0.5$
- $P(X=a)=0$. C'est une particularité des variables aléatoires à densité
- $P(X<a)=P(X\leq a)$. C'est une particularité des variables aléatoires à densité

☞ Illustration graphique de $P_X([a;b])$ dans le cas suivant :
$\mu=0$, $\sigma=1$, $a=-2.5$ et $b=-2$



- la fonction densité représentée est définie par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- la région noircie représente (en unités d'aire) $P_X([-2.5;-2])$
- une valeur approché est $P_X([-2.5;-2])=P(-2.5\leq X\leq -2)\approx 0.0165$

☞ Mode de calcul :

- utilisation de la calculatrice
- (très rarement) utilisation de la table des probabilités de la loi normale centrée (espérance nulle) et réduite (écart-type égal à 1)

En effet on admet que la variable aléatoire définie par $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite

Application : on cherche à calculer P(10 < X < 13) pour X suivant une loi normale de paramètres $\mu=11,\sigma=2$

$$10<X<13\Leftrightarrow 10-11<X-11<13-11\Leftrightarrow \frac{10-11}{2}<\frac{X-11}{2}<\frac{13-11}{2}\Leftrightarrow -0.5<Y<1$$

Ainsi : $P(10<X<13)=P(-0.5<Y<1)\approx 0.533$

☞ Principaux calculs à la calculatrice (voir impérativement les formulaires fournies avec ce document)

<u>CAS 1</u> : calcul de P(a < X < b).

Dans le cas particulier d'un calcul, sans borne à gauche ou à droite, non pris en compte par certaines calculatrices, prendre une très grande ou très petite valeur pour la borne correspondante (10^{99} ou -10^{99}) suivant le cas

Exemple 7 : Une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 186 et d'écart-type 11.
Calculs à 0.001 près
P(172.8 < X < 205.8) = 0.849
P(X < 189.3) = P(-10^{99} < X < 189.3) = 0.618
P(10^{99} > X > 183.8) = 0.579

CAS 2 : détermination de c connaissant la valeur de P(X < c)

Exemple 8 : Une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 853 et d'écart-type 13
Calculs à 0.01 près
Si P(X < b) = 0.03 , on obtient b = 828.55

CAS 3 : détermination de c connaissant la valeur de P(μ – c < X < μ + c)
Certaines calculatrices ne propose pas directement la valeur de c. On se ramène au cas précédent de la façon suivante :
$P(X<\mu+c)=\frac{1+P(\mu-c<X<\mu+c)}{2}$. On détermine d'abord μ +c puis c

Exemple 9 : on cherche à déterminer c à 0.01 près tel que P(50 – c < X < 50 + c) = 0.9 pour X suivant une loi normale de paramètres $\mu=50,\sigma=2$
On obtient P(X < 50 + c) = $\frac{0.9+1}{2}$ = 0.95 , d'où $50+c\approx53.29$ d'où $c\approx3.29$

CAS 4 : détermination des paramètres de la loi normale

Exemple 10 : Déterminer μ sachant que σ = 6 et P(X < 667) = 0.14 (Nombre décimal arrondi à 10^{-1} près)
On sait que la variable aléatoire définie par $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite
$P(X<667)=0.14\Rightarrow P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{667-\mu}{\sigma})=0.14\Rightarrow P(Y<\frac{667-\mu}{\sigma})=0.14$
On est ramené au calcul de l'exemple 8. On détermine $\frac{667-\mu}{\sigma}$ à l'aide de la calculatrice en spécifiant une espérance nulle et un écart-type égal à 1. Ce qui donne $\frac{667-\mu}{\sigma}$ = - 1.08032
d'où μ = 673.5

Exemple 11 : Déterminer σ sachant que μ = 685 et P(X < 695.8) = 0.81 (Nombre décimal arrondi à 10^{-1} près)
On sait que la variable aléatoire définie par $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite
$P(X<695.8)=0.81\Rightarrow P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{695.8-\mu}{\sigma})=0.81\Rightarrow P(Y<\frac{695.8-\mu}{\sigma})=0.81$

On est ramené au calcul de l'exemple 8. On détermine $\frac{695.8-\mu}{\sigma}$ à l'aide de la calculatrice en spécifiant une espérance nulle et un écart-type égal à 1. Ce qui donne $\frac{695.8-\mu}{\sigma}$ = 0.877896 d'où σ = 12.3

Exemple 12 : Une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ. On suppose que P(X < 318) = 0.45 et P(X < 346.8) = 0.98 . Déterminer μ et σ à 10^{-1} près
On sait que la variable aléatoire définie par $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite

$P(X<318)=0.45 \Rightarrow P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{318-\mu}{\sigma})=0.45 \Rightarrow P(Y<\frac{318-\mu}{\sigma})=0.45$

$P(X<346.8)=0.98 \Rightarrow P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{346.8-\mu}{\sigma})=0.98 \Rightarrow P(Y<\frac{346.8-\mu}{\sigma})=0.98$

On est ramené au calcul de l'exemple 8. On détermine $\frac{318-\mu}{\sigma}$ et $\frac{346.8-\mu}{\sigma}$ à l'aide de la calculatrice en spécifiant dans chaque cas une espérance nulle et un écart-type égal à 1. Ce qui donne $\frac{318-\mu}{\sigma}$ = -1.25661 et $\frac{346.8-\mu}{\sigma}$ = 2.05375
C'est un système de deux équations à deux inconnues. On obtient : μ = 319.7 et σ = 13.2

☞ Intervalles 1σ , 2σ et 3σ : Ce sont les intervalles suivants
$[\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$; $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$; $[\mu - 3\sigma ; \mu + 3\sigma]$
On admet que pour toutes valeurs de μ et σ , ces intervalles regroupent approximativement 68,3 %, 95,4 % et 99,7 % de la population étudiée.
Autrement dit :

$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.683$
$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.954$
$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0.997$

Ces relations permettent d'estimer le regroupement des valeurs autour de l'espérance

6 – Approximations de loi

Principe : suivant les valeurs des paramètres des variables aléatoires étudiées, on admet que l'on peut approximer certaines lois (L) par d'autres (L_a) dans certains cas que l'on regroupe dans le tableau suivant

L	Paramètres de L	Conditions de l'approximation couramment utilisées	L_a	Paramètres de L_a
Loi binomiale	*n* et *p*	$np>15$ et $n(1-p)>15$ ou $n>30$ et $np>5$ et $n(1-p)>5$	Loi normale	$\mu=np$ $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$
Loi binomiale	*n* et *p*	$n\geq 30$ et $p\leq 0.1$ et $np<15$ ou $n>50$ et $p<0.1$	Loi de Poisson	$\lambda=np$

Exemple 13 : Dans la ville imaginaire de GROBURCHE, pour tout examen, on estime qu'un étudiant sur 150 arrive avec sa calculatrice sans pile. Lors d'un examen donné, on choisit au hasard et de façon indépendante 200 étudiants, quelle est la probabilité d'avoir deux étudiants avec des calculatrices sans pile

Par calcul exact, on considère la variable aléatoire X repérant le nombre d'étudiants concernés par ce problème, elle suit une loi binomiale B(200, $\frac{1}{150}$).
La probabilité demandée est $P(X=2)\approx 0.235$

Le tableau précédent indique que la loi binomiale que suit X peut être approximée par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = n\,p = \frac{200}{150}$
La probabilité demandée est approximée par $P(X=2)\approx 0.234$

☞ Corrections de continuité : (voir les notations du tableau précédent) dans le cas de l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale, il convient de distinguer $P(X<k)$ et $P(X\leq k)$.
On note Y la variable aléatoire fictive associée à X qui suivrait la loi normale ayant les **<u>MÊMES</u>** paramètres (espérance et écart-type) que la loi binomiale

Le tableau suivant regroupe les corrections à effectuer

Valeur à approcher	Valeur approchée
$P(X=k)$	$P(k-0.5\leq Y\leq k+0.5)$
$P(X\leq k)$	$P(Y\leq k+0.5)$
$P(X<k)$	$P(Y\leq k-0.5)$
$P(k\leq X)$	$P(k-0.5\leq Y)$
$P(k<X)$	$P(k+0.5\leq Y)$

Exemple 14 : Soit B(100, 0.4) . On peut approximer cette loi par une loi normale de paramètres $\mu = n\,p = 40$ et $\sigma = \sqrt{n\,p(1-p)} = \sqrt{24}$

1 – $P(X=40)\approx 0.0812$ et sa valeur approchée : $P(39.5\leq Y\leq 40.5)\approx 0.0813$

2 – $P(35\leq X\leq 39)\approx 0.3317$ et sa valeur approchée avec correction de continuité : $P(34.5\leq Y\leq 39.5)\approx 0.3286$
Remarque : l'approximation sans correction de continuité est assez différente du résultat exact, en effet $P(35\leq Y\leq 39)\approx 0.2654$

3 – $P(X<42)\approx 0.6225$ et sa valeur approchée avec correction de continuité : $P(Y\leq 41.5)\approx 0.6203$
Remarque : l'approximation sans correction de continuité est assez différente du résultat exact, en effet $P(Y<42)=P(Y\leq 42)\approx 0.6585$